



Vers un nouveau concept pour la génération automatique de réseaux équivalents à partir de calculs de type éléments finis

Dimitri Tratkanov, Pavel Prokojev, Arnaud Hubert, Alejandro Ospina

► To cite this version:

Dimitri Tratkanov, Pavel Prokojev, Arnaud Hubert, Alejandro Ospina. Vers un nouveau concept pour la génération automatique de réseaux équivalents à partir de calculs de type éléments finis. Symposium de Génie Electrique, Université de Lorraine [UL], Jul 2018, Nancy, France. hal-02983337

HAL Id: hal-02983337

<https://hal.science/hal-02983337>

Submitted on 29 Oct 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Vers un nouveau concept pour la génération automatique de réseaux équivalents à partir de calculs de type éléments finis

Dimitri TRATKANOV, Pavel PROKOPEV, Alejandro OSPINA-VARGAS, Arnaud HUBERT

Sorbonne Universités, Université de Technologie de Compiègne, Roberval FRE CNRS-UTC 2012,
Centre de recherche Royallieu, CS 60 319, 60203 Compiègne cedex.

L'objectif de ce travail de recherche est de proposer un nouveau concept pour la génération automatique de réseaux équivalents à partir de calculs de type *éléments finis* (TEF). La réduction d'ordre du modèle s'appuie sur des techniques informatiques de clustering qui segmentent la géométrie réelle en un nombre restreint d'ensembles à champs homogène. La distribution des champs dans la géométrie est calculée à partir de résultats d'une méthode TEF (plus précisément, il s'agit d'une *Cell-Method*) et à l'aide d'éléments de Whitney. Ces ensembles homogènes peuvent alors être regroupés (fusionner) pour générer les composants du réseau équivalent. Les techniques présentées dans ce papier seront illustrées sur un exemple magnétostatique permettant, à partir du calcul du potentiel vecteur magnétique sur un maillage TEF, de générer un réseau de reluctance précis mais d'ordre très réduit par rapport au modèle initial.

Mots-clés – Méthode des éléments finis généralisée, *Cell-Method*, réduction de modèles, modèles topologiques.

1. INTRODUCTION

1.1. Contexte du travail

La conception de dispositifs technologiques requière de plus en plus souvent l'utilisation massive de calculs numériques. Comme illustré sur le cycle en V de la figure 1, la conception passe toujours par différents niveaux de détails où les modèles utilisés sont différents au niveau structure, précision et complexité. En génie électrique, la conception système utilise essentiellement des modèles de type réseau (interconnexion de systèmes à paramètres localisés) alors que la conception détaillée utilise plutôt des modèles type éléments finis (TEF, systèmes à paramètres distribués, discrétisés sur des maillages de la géométrie réelle) [3]. Les seconds modèles sont plus riches et plus précis que les premiers mais ils sont beaucoup plus gourmands en temps de calcul, ce qui limite leur utilisation pratique dans les phases de conception préliminaire, de conception système ou d'optimisation. Générer des modèles réseaux précis en s'appuyant sur des résultats issus de modèles « fins » (TEF) est donc un enjeu majeur pour toute l'ingénierie de conception basée sur les modèles (Model Based System Engineering (MBSE), [5]).

1.2. Description du concept

La méthode proposée dans ce travail est basée sur une approche originale qui génère automatiquement un réseau équivalent (RE) avec une réduction des degrés de libertés (DDL). Ces deux objectifs sont basés sur une analyse topologique du problème physique. Actuellement, quelques approches de génération de RE reposent déjà sur une approche topologique de réseau (cf. l'exemple de la méthode PEEC [4]), mais la réduction de modèle qui suit ne repose pas sur des considérations physiques et topologiques (elle utilise principalement des méthodes de Krylov ou de POD). De plus, la génération de RE et la réduction de DDL sont de processus indépendants de sorte que la ré-

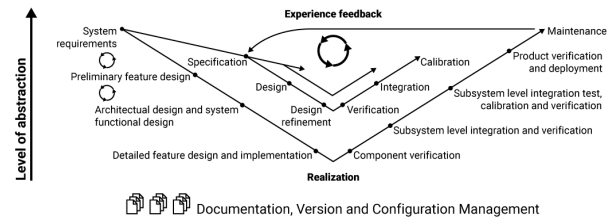


Fig. 1. Le cycle en V de description des étapes de conception d'un dispositif technologique [1].

duction de modèle ne prend pas en compte certains des aspects topologiques du modèle original à réduire.

Pour maîtriser au mieux tous les aspects de génération de RE, les quantités physiques et la topologie du modèle initial doivent être manipulées simultanément. L'objectif final est de proposer un modèle multi-échelle pouvant simplifier la modélisation et la simulation des dispositifs multi-physiques. Ce modèle multi-échelles devrait convenir à la fois pour l'analyse fine de solution de conception (modèle TEF) et pour les phases de conception système, d'optimisation ou de synthèse de lois de contrôle (RE).

Le but essentiel de ce travail de recherche est de simplifier le passage entre différents niveaux d'abstraction au niveau des modèles utilisés dans les phases de conception, notamment entre le modèle géométrique et le modèle de système.

Comme présenté dans l'introduction, l'approche MBSE nécessite l'utilisation de différents modèles à différents niveaux d'abstraction car chaque modèle a ses avantages et ses inconvénients. Les modèles TEF sont précis mais demandent beaucoup de temps de calcul et sont difficiles à utiliser dans une procédure d'optimisation. Ces difficultés sont encore plus marquées dans le cas d'une prise en compte de l'évolution temporelle (analyse transitoire) car un très grand nombre d'évaluations de modèles quasi-statique est alors nécessaire (échantillonnage temporel et calcul de l'évolution dynamique entre chaque pas de temps). Il est alors nécessaire de faire appel à des modèles réduits de type réseau. Le travail présenté dans ce papier n'utilise pas, à proprement parlé, la méthode classique des éléments finis mais une extension *topologique* (méthode issue des travaux rassemblés autour de la *Cell-method* (CM) et du *Discrete Exterior Calculus* (DEC)). L'aspect topologique de cet extension facilite de fait la génération de réseaux par fusion de cellules (k-cell ou k-chain) et de grandeur globales (k-cocell ou k-cochaines) pour toutes dimensions $k \leq 3$.

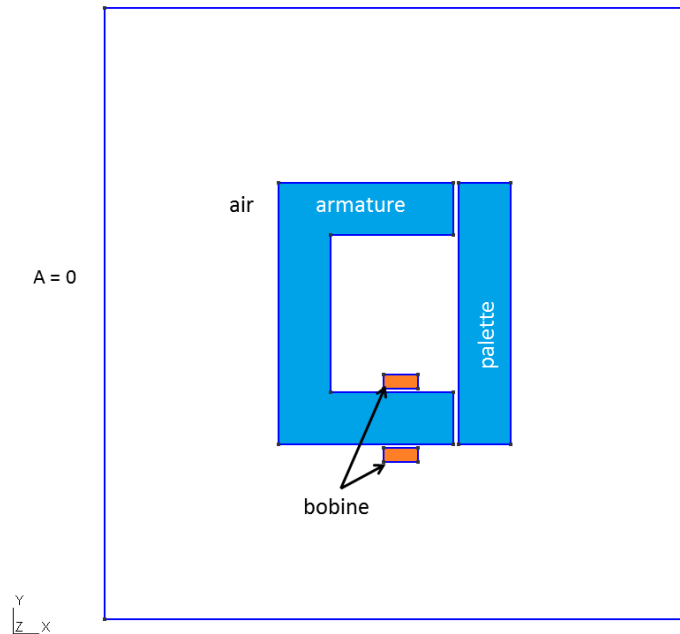
L'exemple abordé dans cet article concerne une étude de cas magnétostatique 2D sur une géométrie simplifiée d'un relais électro-mécanique (cf. fig. 2-a pour un exemple de relais et fig. 2-b pour une description d'une géométrie simplifiée).

Dans ce papier, l'étude de cas est résolue en tant que problème 2D (couple transversale du relais montré dans la fig. 2-b) mais cette méthode peut être étendue pour des problèmes 3D sans changement significatif de la méthodologie. Le dispositif comprend un noyau fixe en forme de Π (armature), une bobine et une partie mobile en forme de I (lame ou palette).

Même si le modèle 2D TEF correspondant à cet exemple ne nécessite pas de calcul haute performance (ce qui implique un intérêt limité de la réduction de modèle pour ce cas particulier), ce ne serait plus le cas si l'on devait ajouter la dépendance temporelle (contrôle du courant dans la bobine ou de position de la palette), la prise en compte du mouvement de la palette mobile ou les non-linéarités du matériau pour réaliser une optimisation des dimensions géométriques, par exemple. Ce problème magnétostatique 2D, finalement assez simple au niveau calculatoire, a été choisi comme une première illustration de notre méthodologie de génération automatique de modèles réduits. Il est évident que cette méthode est dédiée à moyen terme à des problèmes plus complexes que cet exemple.



(a) Exemple d'un relais électromagnétique.



(b) Géométrie du cas traité (coupe transversale 2D d'une géométrie simplifiée de relais électromagnétique).

Fig. 2. Cas d'application utilisé pour illustrer le papier.

Les différentes étapes de ce travail sont illustrées sur la fig. 3. Elles comprennent deux grandes étapes, l'étape 1 de modélisation fine qui sera présentée dans la prochaine section et l'étape de génération de modèles réduits qui sera présenté dans la sec-

tion suivante.

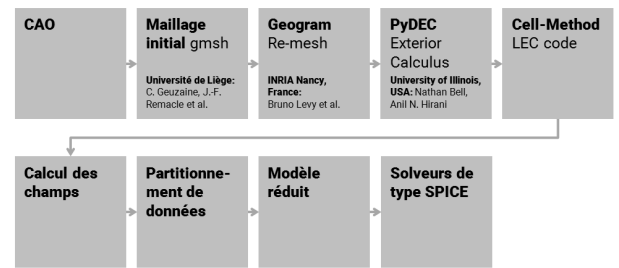


Fig. 3. Description générale des étapes du travail présenté dans le papier.

2. MODÉLISATION TEF PAR CM

2.1. Modélisation géométrique

La CM est utilisée comme méthode de base pour la génération des modèles TEF car elle manipule simultanément l'analyse physique, la topologie et le processus de discrétisation mathématique. Elle présente donc des avantages particuliers par rapport à la méthode des EF classique. Contrairement à certains travaux enrichissant la méthode des EF classique en utilisant les formes différentielles, la CM propose un schéma numérique qui repose, non pas sur la formulation faible des équations aux dérivées partielles (EDP), mais sur une formulation intégrale globale qui ne nécessite pas la discrétisation des EDP. Cela facilite alors l'intégration des grandeurs globales sur les volumes, les surfaces et les parcours qui composent le maillage (simples sommations de k-chaines ou formes différentielles discrètes sur le maillage de la géométrie).

2.1.1. Cell-Method

La Cell-Method est une méthode de modélisation et de simulation numérique développée dans le cadre des travaux de E. Tonti [6]. Cette approche originale utilise une classification des variables physiques en deux classes distinctes, de configuration et de source, dont le produit de dualité donne les variables de puissance/énergie. Les variables manipulées dans ce cadre sont des variables globales (ou cochaines) résultant d'une intégration des variables de champ classiques sur la géométrie du dispositif à simuler. Ces intégrations peuvent être conduites suivant plusieurs dimensions de l'espace : une k-cochaine résulte de l'intégration d'une k-forme différentielle sur un « pavé » d'espace de dimension k (une k-chaine).

La répartition des différentes variables d'un problème physique peut se décrire graphiquement à l'aide d'un diagramme des séquences d'homologie et de co-homologie appelé diagramme de Tonti. Ces séquences décrivent les relations entre variables d'un même groupe (définies sur le même espace topologique) et correspondent dans la CM à une généralisation de la notion de matrice d'incidence utilisée pour la description des interconnexions dans les réseaux [12]. Ces matrices sont l'analogue discret (sur un maillage) des opérateurs différentiels de l'analyse vectorielle (gradient, rotationnel, divergence). Des exemples de diagrammes de Tonti, issus de [13] sont reproduits sur la figure 4-a et 4-b pour un problème d'électrocinétique et un problème d'électrostatique.

Dans notre approche la CM a été utilisé comme méthode de base pour des modèles à paramètres distribués car elle présente certains avantages par rapport à la méthode des EF pour cette application, notamment l'intégration des grandeurs globales sur des volumes, surfaces et chemins y est réalisé très simplement. Cette propriété est à la base de notre choix pour la CM plutôt qu'une méthode éléments finis plus classique.

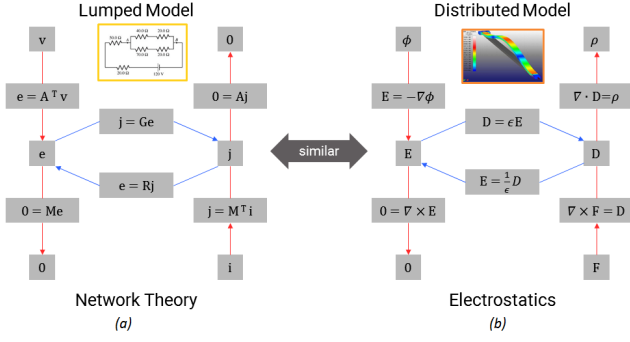


Fig. 4. Diagrammes de Tonti : (a) Théorie des réseaux électriques et électrocinétique discrète (modèle à paramètres localisés), (b) Électrostatique (modèles à paramètres distribués) [13].

2.1.2. Maillage

Afin d'utiliser la dualité intrinsèque à la CM dans la modélisation géométrique, on génère un maillage appelé maillage primal et on introduit un nouveau maillage appelé le maillage dual. Les nœuds du maillage dual sont « situés » entre les sommets du maillage primal. Dans le cas 2D, chaque nœud primal est entouré par une surface dual, chaque arête primale traverse une arête duale et chaque surface primal entoure un nœud dual (voir 5-a sur un exemple 2D utilisant un maillage dual de type Delaunay-Voronoi).

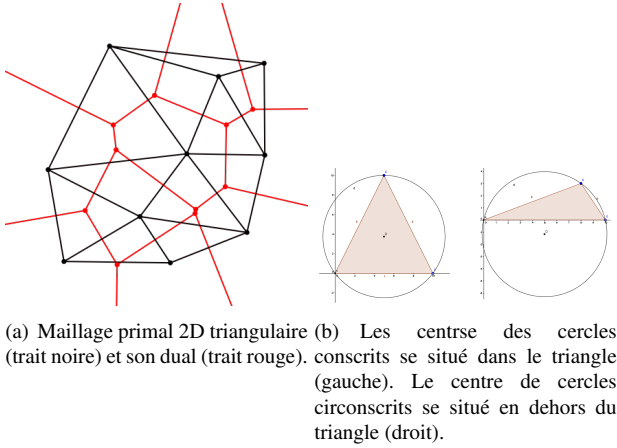


Fig. 5. Exemple de maillages duaux de type Delaunay-Voronoi.

Afin d'utiliser au mieux les propriétés numériques de la CM, la construction du maillage dual est établie par l'algorithme de « Delaunay-Voronoi ». Dans cet algorithme, des sphères (3D) ou bien des cercles (2D) sont circonscrits à chaque tétraèdre (3D) ou triangle (2D). Dans nos travaux, nous avons utilisé GMSH [2] pour générer le maillage dual. La construction du maillage dual est facilement établie si les maillages duaux sont orthogonaux, or, cette condition n'est garantie que si le centre de la sphère ou du triangle circonscrit à un élément donné se trouve à l'intérieur de sa surface. Dans le cas contraire la correspondance biunivoque de dualité n'est pas assurée (voir fig. 5-a, et fig. 5-b). Pour éviter ce type de problème, les travaux issus de [7] proposent de modifier le maillage primal pour que son maillage dual soit orthogonal. Il est donc nécessaire de rajouter une étape supplémentaire dans la construction du maillage qui puisse assurer cette orthogonalité. Lorsque cette condition est atteinte, nous pouvons poursuivre la méthodologie, en définissant des opérateurs de cobord (inverse des opérateurs de connectivité du maillage) de la CM. Ces opérateurs jouent le rôle des opérateurs différentiels de la méthode des éléments finis (ces opérateurs de

cobords sont aussi appelés les opérateurs différentiels discrets dans la littérature du calcul différentiel extérieur discret).

Une fois les opérateurs différentiels discrets définis, le problème se trouve posé sous forme d'un système d'équations algébriques à résoudre [6]. Dans nos travaux, le calcul des opérateurs discrets (équivalent des opérateurs classiques gradient, rotationnel, divergence) est réalisé à l'aide du logiciel de calcul des dérivées extérieures « PyDEC » [14]. Dans la version actuelle de notre logiciel, des conditions aux limites de type Dirichlet et Neumann sont utilisables.

Dans notre exemple, la CM implémentée calcule la forme discrète a du potentiel vecteur magnétique $\vec{A}$. Les autres grandeurs en sont déduites. Les résultats obtenus pour la forme discrète b (cochaîne de la densité de flux magnétique définies sur les arêtes du maillage primal en 2D) de l'exemple du relais sont reportés sur la figure 6.

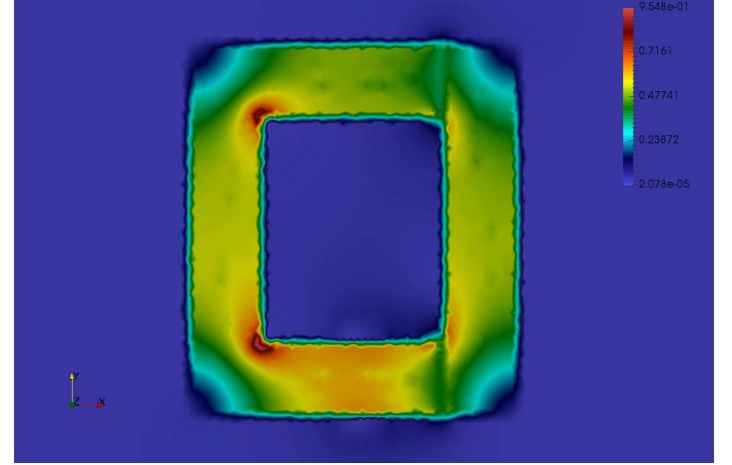


Fig. 6. Calcul de la forme différentielle discrète b (cochaîne de la densité de flux magnétique, définies sur les arêtes du maillage primal en 2D) de l'exemple du relais à l'aide de notre implémentation de la CM.

3. PARTITIONNEMENT DE DONNÉES ET GÉNÉRATION DE MODÈLE RÉDUIT

La plupart des algorithmes de ségmentation (clustering) se basent sur la notion de densité et donc, dans notre cas, sur le champ $\vec{B}$ et non sur des valeurs globales définies sur les éléments géométriques (cochaîne b associée aux arêtes primales du maillage). Ainsi, il est nécessaire de déterminer la valeur de ces densités à partir des résultats de la CM. Cela a été réalisé au moyen d'éléments de Whitney, qui sont les formes font le lien entre les formes différentielles et les champs utilisés généralement pour réaliser une interpolation entre les éléments du maillage.

3.1. Les formes de Whitney

Les éléments Whitney sont dotés d'une propriété de continuité à l'intérieur d'un élément fini. Compte tenu des éléments de bord, la continuité de composante tangentielle du champ local entre éléments adjacents est assurée [6] si

$$\int_{L_i} \vec{w}_j^E \cdot d\vec{l} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } j \neq i \end{cases} \quad (1)$$

Dans notre cas, les formes de Whitney sont utilisées pour calculer le champ magnétique $\vec{B}$ i.e. pour interpoler des quantités de vecteurs associées à des arêtes primal (e.g., la densité de flux magnétique) :

$$\vec{w}_i^E(\vec{B}) = w_i^N \cdot \vec{grad}(w_k^N) - w_k^N \cdot \vec{grad}(w_i^N) \quad (2)$$

où

w_k^N – fonction d’interpolation d’ordre 0 pour le nœud k

$\vec{w}_i^E$ – fonction d’interpolation d’ordre 1 pour l’arrête i

Donc la valeur du champ $\vec{B}(x, y)$ à l’intérieur de chaque élément est calculé comme

$$\vec{B}(x, y) = \sum_{i=1}^3 b \cdot \vec{w}_i^E \quad (3)$$

où

b – circulation de champ magnétique calculé comme Δa vecteur-scalaire

À partir des résultats de simulation du relais électrique calculés grâce à la CM (cf. figure 6) et de ces éléments de Whitney, nous pouvons calculer la distribution du champ vectoriel $\vec{B}$. Celui-ci est représenté sur la figure 7.

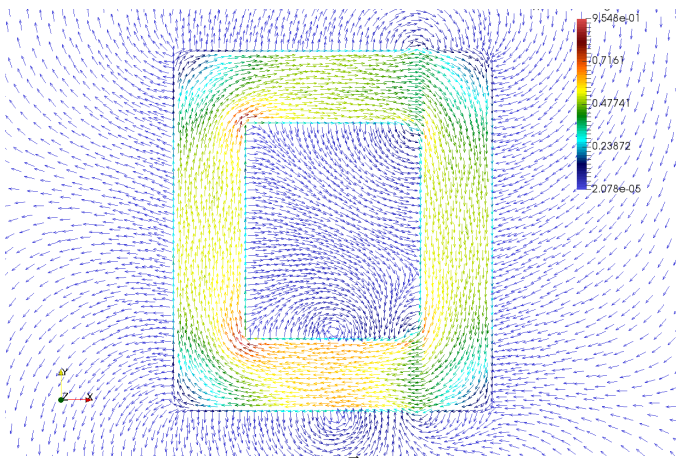


Fig. 7. Distribution du champ vectoriel $\vec{B}$ à partir des résultats de la CM et d’éléments de Whitney.

Un fois que la distribution de champ magnétique $\vec{B}$ est calculé, on commence la segmentation selon les valeurs de $\vec{B}$ afin d’identifier les régions à champ homogène (les régions où la variation de champ $\vec{B}$ est faible). Dans ce but, un algorithme de segmentation automatique à été utilisé.

3.2. Choix d’algorithme

En analyse de données, il existe deux groupes d’algorithmes pour la classification : supervisé et non supervisé. Dans notre cas, nous avons choisi l’algorithme non supervisé pour plusieurs raisons. Premièrement, ce type de classification ne nécessite pas d’avoir une base de données d’apprentissage contenant des « exemples » pour son apprentissage (en général des cas déjà traités et validés). En fait, cette information *a-priori* n’est pas disponible pour tous les appareils électriques existants. En outre, ce type d’expertise est subjectif : deux experts peuvent produire des classifications différentes. Deuxièmement, la plupart des algorithmes supervisés présentent une tendance appelé « overfitting » ou « sur-apprentissage » : ils produisent des résultats d’analyse trop proches d’un ensemble de données particulier (la base de données d’apprentissage) et qui peut donc ne pas correspondre à des données supplémentaires ou ne pas prévoir de manière fiable les observations futures et donner de résultats aberrants sur les données à traiter. Enfin, les algorithmes supervisés nécessitent beaucoup plus de temps de calcul et c’est l’une de leurs principales limites en termes de capacité à s’adapter à un changement d’ordre de grandeur de la tâche (scalability, en anglais).

Parmi les méthodes non supervisées existantes, nous avons choisi les algorithmes qui ont une très grande extensibilité, des

paramètres intuitifs (comme le nombre de clusters ou la taille des échantillons) et permettent de gérer des distributions spatiales (tous les clusters doivent être connexes dans l’espace). En utilisant les caractéristiques comparatives de [15], nous avons testé 2 méthodes : K-Means et DBSCAN. Finalement, l’algorithme DBSCAN a été choisi car il ne nécessite pas de spécifier *a-priori* le nombre de clusters dans les données contrairement à l’algorithme k-Means. De plus, DBSCAN possède des options de réduction de bruit et il est plus robuste dans les problèmes devant gérer des variables spatiales, ce qui permet d’améliorer le clustering dans des cas plus généraux (3D).

3.3. DBSCAN

DBSCAN (Density-Based Spatial Clustering of Applications with Noise) est un algorithme de partitionnement de données proposé en 1996 par Martin Ester et al. [16]. Il s’agit d’un algorithme fondé sur la densité dans la mesure qui s’appuie sur la densité estimée des clusters pour effectuer le partitionnement. Cet algorithme considère les clusters comme des zones de haute densité séparées par des zones de faible densité.

L’idée central du DBSCAN est le concept d’échantillons de noyau, qui sont des centres de clusters dans des zones de forte densité. Un cluster est donc un échantillon de noyau (forte densité), séparé d’autres noyaux par un ensemble d’échantillons « non noyau » proches (en distance métrique) d’un échantillon de noyau. Cette méthode a deux paramètres d’entrée : la distance minimale ϵ (précision de la méthode) et le nombre minimum d’échantillons $min_samples$. L’ensemble de paramètres définit formellement ce que nous voulons exprimer par le mot « dense ». Par exemple, pour former un cluster avec une densité plus élevée, le $min_samples$ doit être plus important et/ou ϵ doit être plus bas [16].

Pour s’assurer que les clusters sont connexes (à enveloppe convexe) dans l’espace, un critère de liaison géométrique est ajouté dans l’algorithme : si il existe un point avec la même densité mais sans aucune connexion avec un noyau, alors ce point va être affecté comme le centre d’un nouveau noyau (zone de haute densité). Malheureusement, cette approche augmente considérablement le nombre des clusters.

Dans notre cas, nous avons utilisé $\epsilon = 0.01$ et $min_samples$ est égal au nombre de niveaux de densité normalisés.

Comme DBSCAN est extensible en dimension (scalable, en anglais), nous pouvons améliorer notre clustering en utilisant plusieurs données différentes, par exemple, le champ $\vec{B}$ et le champ $\vec{H}$, pour ensuite en combiner les résultats.

3.4. Réduction du nombre total de clusters

La méthode de réduction de clusters est basée sur l’optimisation locale et ressemble aux algorithmes de cascade utilisés en morphologie mathématique [17]. Cette méthode est appropriée pour réduire le nombre de « noyaux » pour le clustering.

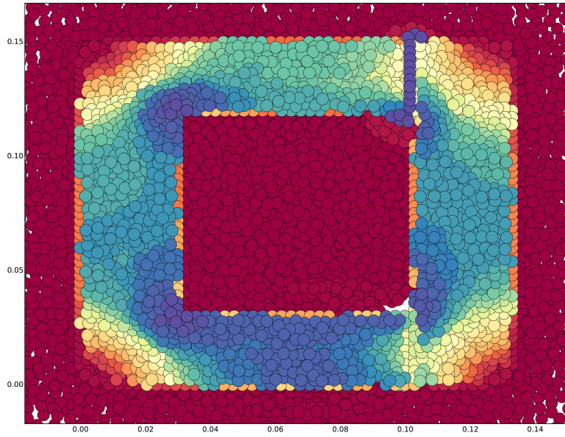
Dans la première étape (fig. 9), on calcule un histogramme avec des valeurs normalisées de densité (en abscisse) et le nombre de point avec chaque niveau de densité (en ordonnée). Par ailleurs, le nombre des niveaux de densité est utilisé comme $min_samples$.

Dans la deuxième étape, une identification des minimums locaux est effectuée (fig. 10). Ensuite, on fusionne tous les points dans les minimums locaux avec la colonne la plus proche du niveau de densité.

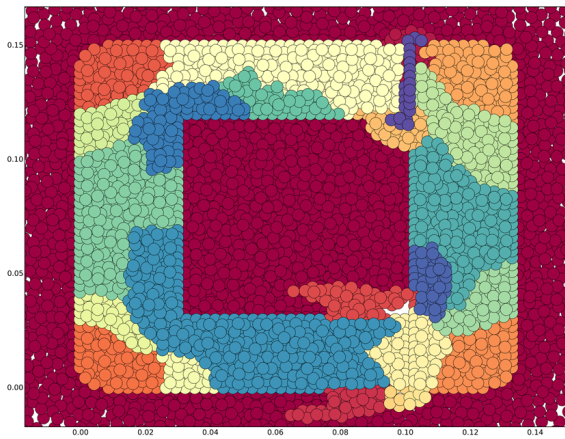
Enfin, nous pouvons obtenir un nouvel histogramme (fig. 11) avec un nombre réduit de niveaux de densité. Le nouvel histogramme sert à réduire le nombre des noyaux lequel est utilisé pour identifier les clusters dans l’algorithme DBSCAN.

Avec cette méthode de réduction, on peut réduire le nombre de 184 clusters (fig.8-a) dans le clustering initial à 24 clusters (fig.8-b). Le processus de réduction du nombre de noyaux peut être répété plusieurs fois.

En outre, une autre méthode de clustering peut être proposée.



(a) Clustering initial obtenu par DBSCAN : 184 classes.



(b) Clustering après réduction : 24 classes.

Fig. 8. Optimisation du nombre de classes (1 cluster = 1 niveau de couleur).

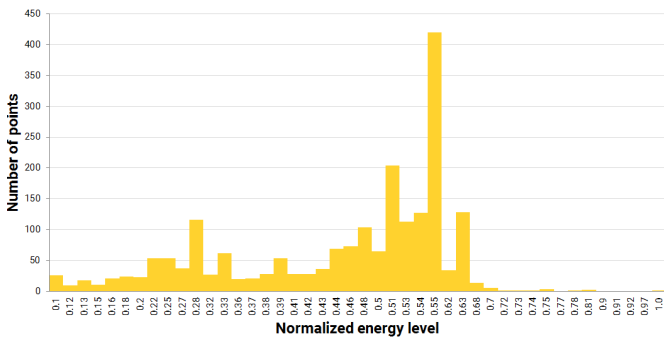


Fig. 9. Histogramme de départ

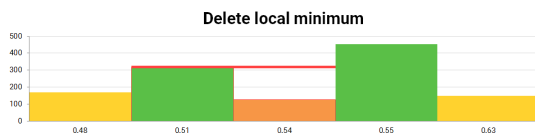


Fig. 10. Suppression d'un minimum local.

On peut d'abord obtenir un histogramme de densité puis utiliser l'algorithme DBSCAN pour chaque colonne de densité. Comme

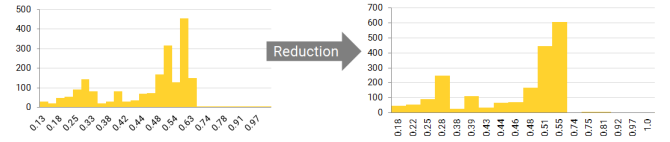


Fig. 11. Principe de réduction des nombres de noyaux.

la densité est la même pour tous les points de la colonne, l'algorithme DBSCAN va repartir tous les points par leur facteur métrique. De cette façon, les clusters vont toujours former des éléments connexes et nous n'avons pas besoin de tester à chaque fois la connectivité des points.

3.5. Génération de modèle réduit

Le but du clustering est de pouvoir identifier des tubes de flux magnétique en prenant l'hypothèse qu'une zone homogène représente au mieux le tube de flux. Pour chacun de ces tubes de flux, on peut identifier des composantes de circuit magnétique afin de construire notre réseau équivalent. Ceci est fait en deux étapes. La première étape, décrite dans cette section, considère les clusters comme l'ensemble des réluctances magnétiques sans source de courant dont les potentiels magnétiques peuvent être définis aisément. L'addition des sources de force magnétomotrice (f_{mm}) et la détermination de leur valeur fera l'objet de la deuxième étape.

Dans la première étape, il est nécessaire d'identifier la structure des réluctances de chaque cluster. Cette structure dépend du nombre d'interfaces du cluster (flux entrants / sortants de sa frontière). Ainsi, il est nécessaire de diviser sa frontière S en sous-frontières S_k en fonction des valeurs de b associées à chaque arête. Sur la fig. 12 l'interface avec les flux entrants est soulignée par un trait rouge et l'interface avec les flux sortant par un trait bleu. Le nombre de réluctances est donc égal au nombre des ces interfaces. Le tube de flux est modélisé comme un chemin depuis le barycentre de chaque frontière jusqu'au barycentre du cluster.

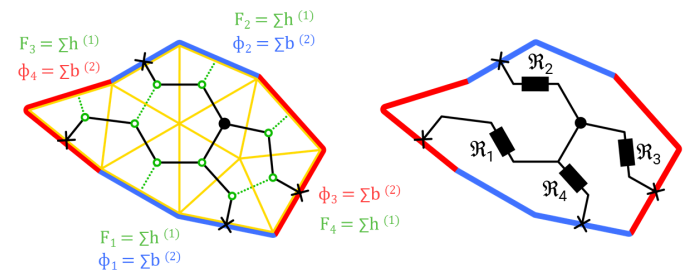


Fig. 12. Identification de la structure du RE d'un cluster.

Un fois que la structure est identifiée, on passe à la détermination des valeurs de chacune des réluctances. La réluctance peut être définie par la loi d'Hopkinson :

$$\mathcal{R} = \frac{F_{mm}}{\phi} = \frac{\int_L \vec{H} d\vec{l}}{\int_S \vec{B} d\vec{S}} \quad (4)$$

Dans cette étape, nous pouvons voir la raison de l'utilisation de CM au lieu des éléments finis classique. Dans l'analyse vectorielle, le flux magnétique est calculé comme $\phi_k = \int_{S_k} \vec{B} \cdot d\vec{S}$. Cette expression nécessite le calcul d'un produit scalaire donc l'utilisation d'une projection. Alors que c'est n'est pas nécessaire dans le cadre de formes différentielles et de la topologie algébrique [18]. Comme la CM est une méthode basée sur la topologie, il est possible d'intégrer les valeurs physiques sur les

instances géométriques de la région identifiée afin de calculer le flux $\vec{B}d\vec{S}$. En conséquence, ce calcul est facilement fait avec de simples sommations des cochains b sur les chaînes C_i définies sur les sous-surfaces S_k dans le maillage primal.

$$\phi_k = \sum_{\forall C_i \in S_k} b_i \quad (5)$$

Grâce à la structure d'homologie/co-homologie de cette modélisation, les propriétés topologiques des cochains magnétiques b assurent la conservation du flux magnétique dans la surface fermée S de n'importe quel cluster :

$$\sum_{\forall S_k \in S} \phi_k = \sum_{\forall S_k \in S} \left(\sum_{\forall C_i \in S_k} b_i \right) = 0 \quad (6)$$

Dans la CM, les forces magnétomotrices sont les duaux des flux (donc défini sur le maillage dual). Ceci implique que, la force magnétomotrice fmm_k doit être défini sur la chaîne duale de chaque surface de flux S_k . Puisque les flux sont associés au maillage primal (arêtes primales en 2D ou surfaces primales en 3D), les fmm doivent être associé aux co-chaînes h et aux chemins $\Gamma_k = \sum_j C_j^*$ défini sur le maillage dual (voir fig. 12) :

$$fmm_k = \sum_{\forall C_j^* \in \Gamma_k} h_j \quad (7)$$

Pour définir la force magnétomotrice fmm_k dual du flux ϕ_k , il est pratique de définir un nœud / sommet *central* dans le maillage dual du cluster. Enfin, les réluctances sont calculées selon la loi de Hopkinson en utilisant le flux ϕ_k de chaque sous-surface S_k et la fmm_k le long d'un chemin partant de cette surface et se terminant au sommet dual central :

$$\mathfrak{R}_k = \frac{fmm_k}{\Phi_k} = \frac{\sum_{\Gamma_k} h}{\sum_{S_k} b} \quad (8)$$

Il est à noter que cette génération automatique de circuit de réluctances repose sur l'hypothèse qu'il n'y a aucune source de courant à l'intérieur du cluster. Cela implique que l'intégration de fmm entre deux points duaux ne dépend pas du chemin d'intégration (dans ce cas, h est une forme différentielle discrète *exacte*). Donc notre approche avec définition de parcours d'intégration entre point central de cluster et point central des sous-surfaces fonctionne correctement. Cette première étape de la procédure de génération automatique de modèle à paramètre localisé donne la structure générale du réseau et permet le calcul de chaque réluctance. Cette première étape ne permet pas de calculer et de situer les sources de fmm dans le réseau. Ces sources doivent être ajoutées dans une deuxième étape. C'est le but de la section suivante.

3.6. Addition des sources de force magnétomotrice dans le réseau

Dans la sous-section précédente, nous avons expliqué comment générer le réseau réduit à partir des résultats de la CM réparties dans les clusters. Les valeurs des réluctances et la topologie du réseau ont été calculés. Néanmoins, des sources de forces magnétomotrices fmm doivent être ajoutées à ce réseau en respectant la loi d'Ampère. En analyse vectorielle, ceci est fait selon l'équation suivante :

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = n \cdot i \quad (9)$$

où

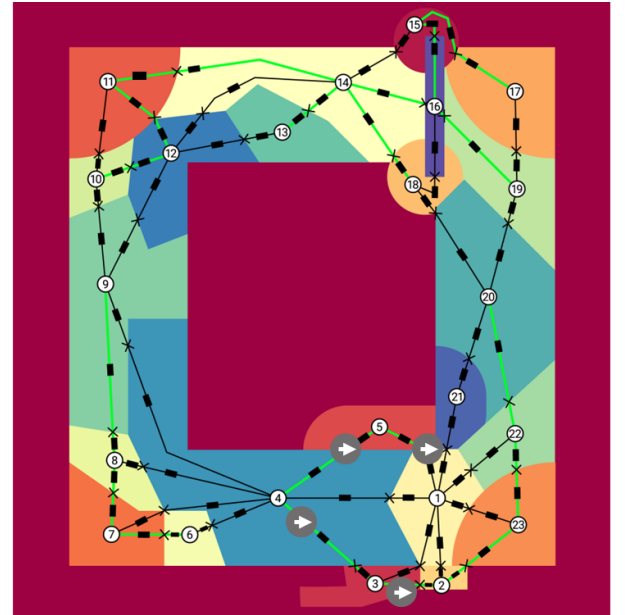
Γ – chemin fermé défini sur le maillage dual ;

n – nombre de spires dans le bobinage ;

i – le courant traversant la surface délimitée par le chemin Γ .

Le réseau de réluctance calculé dans la section précédente peut être décrit par un modèle topologique appelé un graphe linéaire orienté. Ce modèle contient des sommets et des arêtes provenant du maillage dual de la CM. Le nombre requis de sources de fmm dans ce graphe est une propriété invariante du graphe, appelée sa nullité ν . Selon la théorie des matroïdes, cette quantité est la nullité de la matrice d'incidence orientée A associée à ce graphe. Si le graphe possède n sommets et m arêtes, la nullité de A est donnée par $\nu = m - n + c$, où c est le nombre de composantes connexes du graphe ($c = 1$ pour tout maillage connecté utilisé en FEM ou CM) et $n - c$ est le rang de la matrice d'incidence. Le nom *nullité* est rarement utilisé mais est plus communément appelé *cycle rank*, *nombre cyclomatique* ou *rang de circuit* du graphe. C'est aussi le premier nombre de Betti du graphe ou le rang du premier groupe d'homologie (entier) de ce complexe [19]. D'un point de vue pratique, ν peut être interprété comme le nombre de cycles indépendants dans le graphe : nous n'avons donc besoin que d'une source de fmm par cycle indépendant du graphe : seules ν sources de fmm indépendantes doivent être ajoutées dans le réseau entier.

En utilisant l'analyse fondamentale des boucles et des coupes (Loop and Cut-set Analysis) de la théorie des circuits électriques [20, 21], le placement de ces sources de fmm peut être localisé sur ν arêtes choisies comme les arêtes complémentaires d'un arbre couvrant défini sur ce graphe. Comme ces arêtes sont les chaînons (links) complémentaires des branches de cet arbre couvrant, si nous ajoutons un chaînon aux branches de l'arbre, une boucle est produite, c'est-à-dire un chemin fermé Γ . La source de fmm correspondante est alors ajoutée à ce chaînon avec une valeur $\sum_k n_k \cdot i_k$ (i_k sont les valeurs des courants dans la bobine k avec n_k tours traversant la surface délimitée par Γ). S'il n'y a pas de bobine qui traverse cette surface, la source de fmm correspondante est donc nulle.



➔ Source

Fig. 13. Arbre couvrant en noir et chaînons en vert. Le croix désigne le centre d'une sous-surface et le o désigne le centre d'un cluster (une couleur spécifique correspond à un cluster).

Dans notre cas, le réseau est généré avec 24 clusters affichées dans la fig. 8 et le rang de circuit correspondant est égal $\nu = 18$. Ainsi, 18 sources de fmm doivent être ajoutées. Néanmoins,

pour ce dispositif de relais électrique, il n'y a qu'une seule bobine (deux surfaces de courant, une positive et une négative), donc la plupart de ces sources de fmm sont égales à zéro. Le réseau de réluctance final, l'arbre couvrant sélectionné et les sources non nulles correspondantes situées sur ses chaînons sont affichés sur la fig. 13.

4. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Cet article a présenté une méthodologie permettant de générer automatiquement un réseau équivalent de modélisation à partir d'un calcul fin de type éléments finis. Cette méthode a été testée sur un exemple magnéto-statique. À l'heure actuelle, ces travaux sont en cours de finalisation : l'addition de sources de fmm est encore en cours de test final.

Dans la prochaine étape, il sera nécessaire d'identifier la relation entre nombre de classes et précision du RE afin d'estimer la pertinence de la méthode et en définir les avantages/inconvénients ainsi que ses performances.

En perspective, cette méthode pourra être étendu à d'autres types de physique tels que la thermique, la mécanique ainsi que les problèmes couplés pour générer automatiquement des RE multi-physiques.

5. REMERCIEMENTS

Les auteurs remercient F. Freschi et C. Rosso du Politecnico di Torino, Italie pour leurs conseils sur la CM. Ils remercient également B. Lévy et son équipe à l'INRIA, Nancy, France pour l'assistance sur la génération de maillages duaux et sur la mise à disposition de leur bibliothèque de calcul.

6. RÉFÉRENCES

- [1] P. A. Fritzson, « Introduction to Modeling and Simulation of Technical and Physical Systems with Modelica », Hoboken, New Jersey : IEEE Press, John Wiley & Sons, Inc., 2011.
- [2] C. Geuzaine and J.-F. Remacle, « Gmsh : a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities », International Journal for Numerical Methods in Engineering 79(11), pp. 1309-1331, 2009.
- [3] K. C. Kim, J. Lee, H. J. Kim, and D. H. Koo, « Multiobjective optimal design for interior permanent magnet synchronous motor », IEEE Trans. on Magnetics, vol. 45, no. 3, pp. 1780-1783, March 2009.
- [4] F. Freschi, M. Repetto, « A general framework for mixed structured/unstructured PEEC modelling », Applied Computational Electromagnetics Society Journal, 23(3), 200-206, 2008.
- [5] B. Beihoff, S. Friedenthal, D. Kemp, D. Nichols, C. Oster, C. Peredis, H. Stoewer, and J. Wade. « A World In Motion : Systems, Engineering Vision 2025 ». INCOSE Technical report, 2014.
- [6] E. Tonti, « The Mathematical structure of classical and relativistic physics », Basel, Birkhäuser, (2013).
- [7] B. Lévy, D.-M. Yan, W. Wang, Y. Liu, « Efficient Computation of 3D Clipped Voronoi Diagram », GMP 2010, LNCS 6130, pp. 269-282, 2010.
- [8] H. Whitney, « Geometric Integration Theory », Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [9] R. Schuhmann, P. Schmidt, et T. Weiland, « A new whitney-based material operator for the finite-integration technique on triangular grids », IEEE Transaction on Magnetics 38(2), p. 409-412, 2002.
- [10] T. Weiland et al., « Finite Integration Method and Discrete Electromagnetism », Computational Electromagnetics. Lecture Notes in Computational Science and Engineering, vol 28. Springer, Berlin, Heidelberg
- [11] M. Ester, H.-P. Kriegel, J. Sander, et X. Xu, « A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise », Proceedings of the 2nd International Conference on Knowledge Discovery and Data mining, p. 226-231, 1996.
- [12] P. Bamberg, S. Sternberg, « A course in mathematics for students of physics », Cambridge, Cambridge university press, 1990.
- [13] F. Freschi, L. Giaccione, M. Repetto, « Educational value of the algebraic numerical methods in electromagnetism », COMPEL, vol.27, No 6, pp.1343-1357, Emerald, 2008.
- [14] B. Nathan, A.N. Hirani, « PyDEC : Software and Algorithms for Discretization of Exterior Calculus », ACM Trans. Math. Softw. 39, 1, Article 3, 2012.
- [15] D. Courapeau et al. « User's manual : scikit-learn. Overview of clustering methods », site internet, www.scikit-learn.org, 2007.
- [16] M. Ester, H.-P. Kriegel, J. Sander, and X. Xu, « A density-based algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise », in Proceedings of the 2nd International Conference on Knowledge Discovery and Data mining, pp. 226-231., 1996.
- [17] S. Beucher, « Watershed, hierarchical segmentation and waterfall algorithm », in : Springer, pp. 69-76, 1994.
- [18] A. Bossavit, « The premetric approach to electromagnetism in the "waves are not vectors" debate », Advanced Electromagnetics ;1(1), 2012.
- [19] C. Berge, « Graphs and hypergraphs », North-Holland mathematical library, vol. 6, Elsevier, 1973.
- [20] A. Desoer Charles, S. Kuh Ernest, « Basic Circuit Theory », McGraw-Hill, 1969.
- [21] O. Chua Leon, L. Pen-Min, « Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits : Algorithms and Computational Techniques », Prentice-Hall, 1975.